Problème

NOTATIONS.

Dans tout ce problème n et N sont deux entiers naturels non nuls.

• E est l'espace vectoriel $\mathbb{C}^N$.

$\mathfrak{L}(E)$ est l'algèbre des endomorphismes de l'espace vectoriel E.

On note 0 l'endomorphisme nul et e l'endomorphisme identité.

• $\mathbb{C}[X]$ est l'algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$.

$\mathbb{C}_n[X]$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

• Étant donné $f \in \mathfrak{L}(E)$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ on désigne par $S_P(f)$ l'ensemble des valeurs propres de f, par $\mathcal{R}(f)$ l'ensemble $\{g \in \mathfrak{L}(E) | g^2 = f\}$ et par $P(f)$ l'endomorphisme de E : $P(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k . f^k$ (avec la convention $f^0 = e$).

• F et G étant deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, on appelle projecteur sur F parallèlement à G, l'endomorphisme $P_{F,G}$ de E tel que :

$$\forall (x, y) \in F \times G \qquad P_{F,G}(x + y) = x.$$

• On notera $\mathbb{N}_n$ l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Soit f un endomorphisme de E.

On suppose qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et deux endomorphismes non nuls p et q de E tels que :

$$a \neq b \quad \text{et} \quad \begin{cases} e = p + q \\ f = a.p + b.q \\ f^2 = a^2.p + b^2.q. \end{cases}$$

1° Calculer $(f - a.e) \circ (f - b.e)$. En déduire que f est diagonalisable.

2° *a)* Établir : $p \circ q = q \circ p = 0$, $p^2 = p$, $q^2 = q$.

b) Montrer : $S_P(f) = \{a, b\}$.

c) On suppose que $ab \neq 0$. Démontrer que f est bijective et que :

$$\forall m \in \mathbb{Z} \quad f^m = a^m.p + b^m.q.$$

3° Démontrer que p est le projecteur sur Ker $(f - a.e)$ parallèlement à Ker $(f - b.e)$ et que q est le projecteur sur Ker $(f - b.e)$ parallèlement à Ker $(f - a.e)$.

4° On pose $F = \{x.p + y.q | (x, y) \in \mathbb{C}^2\}$.

a) Démontrer que F est une sous-algèbre de $\mathfrak{L}(E)$ et en donner la dimension.

b) Déterminer les projecteurs qui sont éléments de F.

c) Déterminer $\mathcal{R}(f) \cap F$.

5° *Exemple :* On pose

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Calculer J^m pour $m \in \mathbb{N}$. En déduire A^m en fonction de I et J.

b) Démontrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $(B, C) \in (\mathfrak{M}_3(\mathbb{C}))^2$ tel que :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \qquad A^m = a^m B + b^m C.$$

c) Déterminer en fonction de B et C quatre matrices M telles que $M^2 = A$.

II

Soit : $p_1, p_2, \ldots, p_n$ n endomorphismes non nuls de E, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n nombres complexes distincts, et f un endomorphisme de E tel que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \qquad f^m = \sum_{k=1}^{n} x_k^m . p_k.$$

1° Montrer : $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$, $\mathrm{P}(f) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(x_k).p_k$.

2° On pose $\Pi = \prod_{k=1}^{n} (\mathrm{X} - x_k)$ et pour tout $l \in \mathbb{N}_n$, $\Pi_l = \prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq l}} (\mathrm{X} - x_k)$ et $\mathrm{L}_l = \frac{1}{\Pi_l(x_l)} \Pi_l$.

a) Calculer $\Pi(f)$. Qu'en déduit-on pour f ?

b) Montrer $\forall k \in \mathbb{N}_n$, $p_k = \mathrm{L}_k(f)$. Vérifier que :

$$\forall (k, l) \in \mathbb{N}_n^2, \quad p_k \circ p_l = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \neq l, \\ p_k & \text{si} \quad k = l. \end{cases}$$

c) Démontrer que $\mathrm{S}_p(f) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

3° Démontrer que pour $k \in \mathbb{N}_n$: p_k est le projecteur sur $\mathrm{Ker}\,(f - x_k.e)$ parallèlement à $\mathrm{V}_k = \bigoplus_{\substack{1 \leqslant l \leqslant n \\ l \neq k}} \mathrm{Ker}\,(f - x_l.e)$.

4° On désigne par F le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{L}(\mathrm{E})$ engendré par $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$.

a) Quelle est la dimension de F ?

b) Déterminer le nombre d'éléments de $\mathcal{R}(f) \cap \mathrm{F}$.

c) Quels sont les projecteurs qui sont éléments de F ?
[On précisera le nombre de ces projecteurs et les éléments caractéristiques de chaque projecteur.]

5° On suppose $n = \mathrm{N}$.

a) Démontrer $(\forall g \in \mathfrak{L}(\mathrm{E}))[g \circ f = f \circ g \Leftrightarrow g \in \mathrm{F}]$.

b) Déterminer le nombre d'éléments de $\mathcal{R}(f)$.

6° Soit h un endomorphisme diagonalisable de E tel que $\mathrm{S_P}(h) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
Démontrer qu'il existe n endomorphismes non nuls de E $q_1, q_2, \ldots, q_n$ tels que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad h^m = \sum_{k=1}^{n} x_k^m . q_k.$$

7° *Exemple :* On considère la matrice

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Déterminer les valeurs propres x_1, x_2 et x_3 de Λ.

b) Calculer L_1, L_2, L_3 et les coefficients des matrices : $\Lambda_1 = \mathrm{L}_1(\Lambda)$, $\Lambda_2 = \mathrm{L}_2(\Lambda)$ et $\Lambda_3 = \mathrm{L}_3(\Lambda)$.

c) Déterminer en fonction de Λ_1, Λ_2 et Λ_3 toutes les matrices $\mathrm{M} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{M}^2 = \Lambda$.

III

Soit u un endomorphisme u de E tel que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$.

1° *a)* Démontrer qu'il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que la famille $(x, u(x), u^2(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ soit libre.

b) Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$. Établir $(\mathrm{P}(u) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{X}^n$ divise P).

c) Démontrer que $\left(\mathcal{R}(u) \neq \varnothing \Rightarrow n \leqslant \frac{\mathrm{N}+1}{2}\right)$.

2° *a*) Déterminer une suite de nombres réels $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall x \in]-1, 1[\quad \sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k.$$

b) On pose $P_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Démontrer que X^n divise $P_n^2 - X - 1$.

On prend dans la suite du problème $\omega \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ et on pose $Q_{n,\omega} = \omega P_n\left(\frac{X}{\omega^2}\right)$.

3° *a*) Démontrer que l'ensemble des polynômes Q de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tels que X^n divise $Q^2 - X - \omega^2$ est $\{Q_{n,\omega}, -Q_{n,\omega}\}$.

b) Établir $\mathcal{R}(u + \omega^2.e) \neq \varnothing$.

4° On suppose $n = N$ et on prend $x \in E$ tel que la famille $(x, u(x), u^2(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ soit libre. On suppose que $g \in \mathcal{R}(u + \omega^2.e)$.

a) Démontrer que g commute avec u.

b) Prouver qu'il existe $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $g(x) = (P(u))(x)$. Établir $g = P(u)$.

c) Démontrer que $\mathcal{R}(u + \omega^2.e) = \{Q_{n,\omega}(u), -Q_{n,\omega}(u)\}$.

5° *Application :* Soit A la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Déterminer toutes les matrices M telles que $M^2 = A$.

6° On suppose que $n \geqslant 2$ et que $\mathcal{R}(u) \neq \varnothing$. Démontrer que $\mathfrak{R}(u)$ possède une infinité d'éléments.

7° Soit A la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Déterminer les matrices qui commutent avec A.

b) Déterminer toutes les matrices $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $M^2 = A$.

IV

Soit $f \in \mathfrak{L}(E)$. Le polynôme caractéristique de f s'écrit

$$P_f(X) = \prod_{k=1}^{n} (x_k - X)^{\alpha_k}$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les valeurs propres distinctes de f et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ leurs ordres de multiplicité respectifs.

On pose $E_k = \mathrm{Ker}[(f - x_k.e)^{\alpha_k}]$ et on rappelle que $\bigoplus_{1\leqslant k\leqslant n} E_k = E$.

1° *a*) Démontrer qu'il existe un unique polynôme Φ_f de coefficient de plus haut degré égal à 1 tel que

$$\{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(f) = 0\} = \{\Phi_f Q \mid Q \in \mathbb{C}[X]\}.$$

b) Démontrer que Φ_f s'écrit $\Phi_f(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - x_k)^{\beta_k}$ avec $\forall k \in \mathbb{N}_n,\ 1 \leqslant \beta_k \leqslant \alpha_k$.

2° Soit g un endomorphisme de E tel que $g^2 = f$. Montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}_n, \quad g(E_k) \subset E_k.$$

3° Établir :

a) $\left[x_1 = 0 \text{ et } \beta_1 > \frac{\alpha_1 + 1}{2}\right] \Rightarrow \mathcal{R}(f) = \varnothing.$

b) $0 \notin S_P(f) \Rightarrow \mathscr{R}(f) \neq \varnothing$.

c) Démontrer que dans le cas où $x_1 = 0$ et $\alpha_1 \geqslant 2$: $(\mathscr{R}(f) = \varnothing)$ ou ($\mathscr{R}(f)$ possède une infinité d'éléments).

4° On suppose que $\forall k \in \mathbb{N}_n$, $\alpha_k = \beta_k$.

a) Démontrer que si $0 \notin S_p(f)$ alors card $(\mathscr{R}(f)) = 2^n$.

b) On suppose $x_1 = 0$ et $\alpha_1 = 1$. Démontrer que card $(\mathscr{R}(f)) = 2^{n-1}$.

ENSI 88, 2e comp. "Proj. spectraux d'un endomorphisme diagonalisable ; racine carrée d'un endomorphisme".
programme abordé : endomorphismes, projecteurs, matrices d'un endomorphisme, sommes directes de sev, polynômes caractéristiques et minimaux.

Corrigé de Dany-Jack MERCIER

I.1 $(f-a)(f-b) = f^2-(a+b)f+ab$

$$= a^2p+b^2q-(a+b)(ap+bq)+ab$$

$$= ab(e-p-q) = 0$$

f annule le polynôme $(X-a)(X-b)$ scindé et dont toutes les racines sont simples. Donc f sera diagonalisable.

I.2.a $f-ae = (b-a)q$ et $f-be = (a-b)p$, de sorte que $(f-ae)(f-be) = -(a-b)^2qp = 0$ et $qp = 0$. Comme $f-ae$ et $f-be$ commutent, le même raisonnement donne $pq=0$.

Ensuite :

$$e = p+q \Rightarrow p = p^2+pq = p^2$$

$$e = p+q \Rightarrow q = pq+q^2 = q^2$$

p et q seront donc des projecteurs. On sait même que $p^2=p$ entraîne que p est la projection vectorielle sur $\mathrm{Ker}(p-e)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,p$.

I.2.b * I.1 montre que $Sp(f) \subset \{a,b\}$. En effet, si λ est une valeur propre de f associée au vecteur propre $x\neq 0$, on a :

$$(f-a)(f-b)(x) = 0$$

$$(\lambda-a)(\lambda-b)x = 0$$

$$(\lambda-a)(\lambda-b) = 0$$

donc $\lambda \in \{a,b\}$

* Réc., supposons $Sp(f) = \{a\}$. Alors, f étant diagonalisable, $f = ae$ donc $f = a(p+q) = ap+bq$ entraîne $aq = bq$, ce qui est absurde puisque $a\neq b$.

De même $Sp(f) \neq \{b\}$. Donc $Sp(f) = \{a,b\}$.

I.2.c

* f sera bijective puisque 0 n'est pas valeur propre de f, le spectre de f étant $Sp(f) = \{a,b\}$ et $ab\neq 0$.

* Comme $pq=0$, une récurrence facile montre que :

$$f^n = a^n p + b^n q \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On a $f\left(\frac{p}{a}+\frac{q}{b}\right) = (ap+bq)\left(\frac{p}{a}+\frac{q}{b}\right) = e$

de sorte que $f^{-1} = \frac{p}{a} + \frac{q}{b}$

Si $n \in \mathbb{N}$, $f^{-n} = (f^{-1})^n = \left(\frac{p}{a}+\frac{q}{b}\right)^n = \frac{p^n}{a^n} + \frac{q^n}{b^n} = a^{-n}p + b^{-n}q$

comme prévu.

I.3 On a $f = (a-b)p + be$, d'où :

* $x \in \mathrm{Ker}(f - ae) \Leftrightarrow f(x) = ax = (a-b)p(x) + bx$
$\Leftrightarrow p(x) = x$

* $x \in \mathrm{Ker}(f - be) \Leftrightarrow f(x) = bx = (a-b)p(x) + bx$
$\Leftrightarrow p(x) = 0$.

p étant un projecteur, ce sera la projection sur $\mathrm{Ker}(f-ae)$ // à $\mathrm{Ker}(f-be)$.

I.4.a

* F est un sev puisque :

$$f, g \in F \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad f + \lambda g \in F$$

F est un sous-anneau de $\mathcal{L}(E)$ car $pq = qp = 0$ entraîne :

$$\forall f, g \in F \qquad f \circ g \in F \text{ et } g \circ f \in F$$

* $\dim F = 2$ car (p, q) constitue une base de F. En effet :

$xp + yq = 0 \Rightarrow p(xp+yq) = 0 \Rightarrow xp = 0 \Rightarrow x = 0$ (puisque $p \neq 0$)

donc $yq = 0$, puis $y = 0$.

<u>NB</u> : $e = p + q$ appartient à F, donc F est bien une sous-algèbre unitaire de $\mathcal{L}(E)$.

I.4.b

$$(xp+yq)^2 = xp+yq \iff x^2p+y^2q = xp+yq \iff x^2=x \text{ et } y^2=y$$
$$\iff x,y \in \{0,1\}$$

Les projecteurs de F sont $0, p, q, p+q=e$

I.4.c

$g \in R(f) \cap F \iff g = xp+yq$ et $(xp+yq)^2 = f$

d'où $x^2p+y^2q = ap+bq$

ie $x^2 = a$ et $y^2 = b$

ie $x = \pm\sqrt{a}$ et $y = \pm\sqrt{b}$

I.5.a

On vérifie par récurrence : $J^m = 3^{m-1}.J$ pour $m \geq 1$.

La formule du binôme de Newton donne :

$$A^m = (I+J)^m = I + \sum_{k=1}^{m} C_m^k J^k = I + \left(\sum_{k=1}^{m} C_m^k 3^{k-1}\right) J$$

$$= I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{m} C_m^k 3^k\right) J = I + \frac{1}{3}\left[-1+(1+3)^m\right] J$$

$$\boxed{A^m = I + \frac{4^m-1}{3} J}$$

I.5.b On écrit $A^m = \left(I - \frac{J}{3}\right) + 4^m \frac{J}{3}$, qui est de la forme demandée avec :

$a = 1 \quad b = 4 \quad B = I - \frac{J}{3}$ et $C = \frac{J}{3}$

<u>NB</u> : $B^2 = B$ et $C^2 = C$. On vérifie aussi les 3 propriétés de l'introduction qui font que B et C jouent ici le rôle de p et q.

I.5.c D'après I.3.c, $M^2 = A$ sera en particulier vérifié avec les 4 matrices $M = \varepsilon B + 2\varepsilon' C$, où $\varepsilon, \varepsilon' = \pm 1$

II.1 Notons $P(X) = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$

$$P(f) = \sum_{i=0}^{d} a_i f^i = \sum_{i=0}^{d} \sum_{k=1}^{n} a_i x_k^i p_k = \sum_{k=1}^{n} P(x_k).p_k$$

II.2.a D'après la question précédente :

$$\Pi(f) = \sum_{k=1}^{n} \Pi(x_k).p_k = 0$$

f annule donc le polynôme scindé $\Pi(X)$ dont toutes les racines sont simples. On déduit que f est diagonalisable. On peut aussi en déduire que :

$$Sp(f) \subset \{x_1, \dots, x_n\}$$

II.2.b

* $L_k(f) = \dfrac{1}{\Pi_k(x_k)} \Pi_k(f)$ où $\Pi_k(f) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\Pi_k(x_i)}_{=\,0 \text{ si } i \neq k} p_i = \Pi_k(x_k).p_k$

donc $L_k(f) = p_k$

* $p_k \circ p_\ell = L_k(f) \circ L_\ell(f) = (L_k . L_\ell)(f)$

Si $\underline{k \neq \ell}$, il existe un polynôme R tel que $L_k . L_\ell = R.\Pi$, et :

$$p_k \circ p_\ell = (R.\Pi)(f) = R(f) \circ \Pi(f) = 0 \qquad \text{car } \Pi(f) = 0.$$

Ainsi : $\boxed{p_k \circ p_\ell = 0 \text{ si } k \neq \ell}$

* On a $e = p_1 + \dots + p_n$ d'où $p_k = p_1 p_k + \dots + p_k^2 + \dots p_n p_k = p_k^2$ pour tout $k \in \mathbb{N}_n$.

2 solution : $p_k \circ p_k = L_k(f) \circ L_k(f)$

$L_k(f) = \frac{1}{\Pi_k(x_k)} \Pi_k(f)$ entraine $(f - x_k e) \circ L_k(f) = \frac{1}{\Pi_k(x_k)} \Pi(f) = 0$

d'où $f \circ L_k(f) = x_k L_k(f)$

On aura aussi $f^2 \circ L_k(f) = f \circ (x_k L_k(f)) = x_k (f \circ L_k(f)) = x_k^2 L_k(f)$

Par linéarité, on obtient alors :

$$L_k(f) \circ L_k(f) = L_k(x_k) . L_k(f)$$
$$= L_k(f) \quad \text{puisque} \quad L_k(x_k) = 1$$

CQFD

II.2.c

* On a vu que $Sp(f) \subset \{x_1, ---, x_n\}$ en II.2.a.
* S'il existe k tel que $x_k \notin Sp(f)$, $f - x_k e$ sera inversible et

$$\Pi(f) = (f - x_k e) \circ \Pi_k(f) = 0$$

entraine $\Pi_k(f) = 0$, soit $p_k = 0$. C'est absurde.

II.3 $p_k(x) = L_k(f)(x) = \frac{1}{\Pi_k(x_k)} \Pi_k(f)(x) = \frac{1}{\Pi_k(x_k)} \prod_{i \neq k} (f - x_i e)(x)$ (*)

* Si $x \in \bigoplus_{\substack{1 \leq l \leq n \\ l \neq k}} \mathrm{Ker}(f - x_l e)$, alors $p_k(x) = 0$ puisque l'un des termes du produit (*) est nul (les endomorphismes intervenant dans le produit $\prod_{i \neq k} (f - x_i e)$ commutent entre eux ...)
* Si $x \in \mathrm{Ker}(f - x_k e)$, (*) donne :

$$p_k(x) = \frac{1}{\Pi_k(x_k)} \prod_{i \neq k} (x_k - x_i) x = x$$

ce qui prouve que, p_k étant un projecteur d'après II.2.b, p_k est la projection sur $\mathrm{Ker}(f - x_k e)$ // à V_k (puisque f étant diagonalisable de v.p. x_k, on a $E = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}_n} \mathrm{Ker}(f - x_k e)$)

II.4.a $\sum \alpha_k p_k = 0 \Rightarrow p_i(\sum \alpha_k p_k) = \alpha_i p_i = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0$

Donc $\dim F = n$

II.4.b Si $g \in \mathcal{R}(f) \cap F$, alors $g^2 = f$ et $g = \sum \alpha_k p_k$. D'où :

$$\sum \alpha_k^2 p_k = \sum x_k p_k \Leftrightarrow \alpha_k^2 = x_k \quad \forall k$$

Donc $\# \mathcal{R}(f) \cap F = \begin{cases} 2^n \text{ si } x_1 \cdots x_k \neq 0 \\ 2^{n-1} \text{ si } x_1 \cdots x_k = 0 \end{cases}$

II.4.c $g = \sum \alpha_k p_k$ est un projecteur ssi $g^2 = g$, ie $\sum \alpha_k^2 p_k = \sum \alpha_k p_k$

On trouve $\alpha_k^2 = \alpha_k$ pour tout k, soit $\alpha_k \in \{0,1\}$. Il y a donc 2^n projecteurs dans F

* $g = \sum_{k \in K} p_k$, où $K \subset \mathbb{N}_n$, sera la projection sur $\bigoplus_{i \in K} \mathrm{Ker}(f - x_i e)$ parallèlement à $\bigoplus_{i \notin K} \mathrm{Ker}(f - x_i e)$:

En effet, en décomposant le vecteur u ainsi :

$$u = \sum_{i \in K} u_i + \sum_{i \notin K} u_i$$

dans la somme directe $E = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}_n} \mathrm{Ker}(f - x_i e)$, on obtient, compte tenu de $\mathrm{Ker}(f - x_i e) = \mathrm{Im}\, p_i = \mathrm{Im}\, p_i$ et $p_k \circ p_l = \delta_{kl} p_k$:

$$g(u) = \sum_{i \in K} g(u_i) + \sum_{i \notin K} g(u_i)$$

$$g(u) = \sum_{i \in K} \sum_{k \in K} p_k(u_i) + \sum_{i \notin K} \sum_{k \in K} p_k(u_i)$$

$$g(u) = \sum_{i \in K} u_i$$

CQFD

II.5.a

* $g \in F \Rightarrow g = \sum \alpha_k p_k$.

On a $\begin{cases} g \circ f = \sum \alpha_k \, p_k \circ f \\ f \circ g = \sum \alpha_k \, f \circ p_k \end{cases}$ et $p_k \circ f = f \circ p_k$ puisque $f = \sum x_k p_k$.

On en déduit bien $g \circ f = f \circ g$

* Réc., supposons $g \circ f = f \circ g$. f est diagonalisable, et

$$E = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}_n} \operatorname{Ker}(f - x_i e)$$

Ici $n = N$ donc $\dim \operatorname{Ker}(f - x_i e) = 1$. Notons $(v_1, \dots, v_n)$ une base de vecteurs propres :

$$g \circ f(v_j) = f \circ g(v_j)$$

donc $\quad x_j \, g(v_j) = f \circ g(v_j)$

et $\quad g(v_j) \in \operatorname{Ker}(f - x_j e)$

> 2ᵉ solution : Matricielle. La matrice de f dans une base $(v_1, \dots, v_n)$ tq $v_i \in \operatorname{Ker}(f - x_i e)$ est $\operatorname{Diag}(x_1, \dots x_N)$. Donc $f \circ g = g \circ f$ se traduit par
>
> $$\begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_N \end{pmatrix}$$
>
> où $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix}$ est la matrice de g dans $(v_1, \dots, v_n)$.
> En égalant les coefficients $i$ligne-$j$colonne de ces 2 matrices, on obtient $x_i a_{ij} = a_{ij} x_j \Rightarrow a_{ij} = 0$ si $i \neq j$
> d'où $g = \sum_k a_{kk} p_k$. CQFD

Notons alors $\boxed{g(v_j) = a_j v_j}$ (ie la matrice de g est diagonale dans la base $(v_1, \dots, v_n)$).

Si $u = \sum_i \alpha_i v_i$, $g(u) = \sum_i \alpha_i a_i v_i = \sum_i a_i p_i(u)$ de sorte que $\boxed{g = \sum a_i p_i \in F}$

II.5.b Ici $\mathcal{R}(f) \cap F = \mathcal{R}(f)$ puisque :

$$g \in \mathcal{R}(f) \Rightarrow g^2 = f \Rightarrow g \circ f = g^3 = f \circ g \underset{\text{II.5.a}}{\Leftrightarrow} g \in F$$

En utilisant II.4.b : $\boxed{\# \mathcal{R}(f) = \begin{cases} 2^n & \text{si } x_1 \dots x_n \neq 0 \\ 2^{n-1} & \text{si } x_1 \dots x_n = 0 \end{cases}}$

II.6 E sera somme directe des n espaces propres $Ker(h - x_k e)$. Notons q_k la projection sur $Ker(h - x_k e)$ parallèlement à $\bigoplus_{\ell \neq k} Ker(h - x_\ell e)$.

On constate que :

$$q_k \circ q_\ell = 0 \quad \text{si } k \neq \ell$$

$$q_k^2 = q_k \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}_n$$

Si $u = \sum_{k=1}^{n} u_k$ est la décomposition de u, avec $u_k \in Ker(h - x_k e)$, alors $h(u) = \sum x_k u_k = \sum x_k q_k(u)$ donc $h = \sum_{k=1} x_k q_k$.

Il est ensuite facile de voir que $h^m = \sum_{k=1}^{m} x_k^m q_k$.

II.7.a $$\chi_\Lambda(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 & -1 \\ 1 & -X & -1 \\ -1 & 1 & -X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -X+1 & 1 & -1 \\ 1-X & -X & -1 \\ 0 & 1 & -X \end{vmatrix}$$

$$= X(1-X)(X+1)$$ en développant suivant la 1re colonne.

Donc $Sp(\Lambda) = \{0, -1, 1\}$

II.7.b Posons $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ et $x_3 = 1$

$\Pi_1 = X(X-1)$ et $L_1 = \frac{1}{2}\Pi_1$

$\Pi_2 = (X+1)(X-1)$ et $L_2 = -\Pi_2$

$\Pi_3 = (X+1)X$ et $L_3 = \frac{1}{2}\Pi_3$

Donc $$\Lambda_1 = L_1(\Lambda) = \frac{1}{2}\Lambda(\Lambda - I) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_2 = L_2(\Lambda) = -(\Lambda + I)(\Lambda - I) = 1 - \Lambda^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_3 = L_3(\Lambda) = \frac{1}{2}(\Lambda + I)\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

II.7.c Les Λ_k jouent le rôle des p_k. On applique donc le II.5.b : $M^2 = \Lambda \iff M = \alpha_1 \Lambda_1 + \alpha_2 \Lambda_2 + \alpha_3 \Lambda_3$ avec $\alpha_1^2 = -1$, $\alpha_2^2 = 0$ et $\alpha_3^2 = 1$.

Donc $M^2 = \Lambda \iff M = \pm i \Lambda_1 \pm \Lambda_3$. Il y a 4 solutions.

III.1.a Soit x un vecteur tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$. Considérons :

$$\alpha_0 x + \alpha_1 u(x) + \dots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(x) = 0$$

En appliquant u^{n-1} : $\alpha_0 u^{n-1}(x) = 0 \Rightarrow \alpha_0 = 0$

En appliquant u^{n-2} : $\alpha_1 u^{n-1}(x) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$

et, de proche en proche : $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$.

III.1.b

* Si $X^n | P$, $P = Q . X^n$ et $P(u) = Q(u) \circ u^n = 0$
* Réciproquement, si $P(u) = 0$, soit $P(X) = Q(X).X^n + R(X)$, $\deg R < n$, la division euclidienne de P par X^n. Comme $P(u) = 0$ et $u^n = 0$, on obtient

$$R(u) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k = 0 \qquad (*)$$

Il suffit de choisir x tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$ et d'observer que $(*)$ entraine :

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x) = 0$$

pour conclure à $a_0 = \dots = a_{n-1} = 0$ d'après III.1.a.

<u>Donc $P(X) = \sum_{k \geq n}^{d} a_k X^k$ sera divisible par X^n.</u>

III.1.c

Si $g \in \mathcal{R}(u)$, $g^2 = u$ donc $g^{2n} = u^n = 0$ et $g^{2n-2} = u^{n-1} \neq 0$.
g est ainsi nilpotent d'ordre $2n$ ou $2n-1$. Dans les 2 cas, on a vu qu'il existait $x \in E$ tel que la famille

$$(x, g(x), \dots, g^{2n-2}(x))$$

soit libre (III.1.a).

Donc :
$$2n-1 \leq N$$
$$n \leqslant \frac{N+1}{2}$$

III.2.a

$(1+x)^{1/2}$ est développable en série entière sur son disque de convergence $]-1, 1[$:

$$(1+x)^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right) \cdots \left(\frac{1}{2}-k+1\right) x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} \cdot [1.3.5 \dots (2k-3)] \, x^k$$

III.2.b On a $\sqrt{1+x} = P_n(x) + x^n . R(x)$ où $R(x)$ est une série entière. Donc :

$$1+x = P_n^2(x) + x^{2n} R^2(x) + 2x^n P_n(x) R(x)$$

$$P_n^2(x) - x - 1 = x^n \left(-2 P_n(x) R(x) - x^n R^2(x)\right)$$
$$= x^n Q(x)$$

où $Q(x)$ est, à priori, une série entière. Comme P_n est un polynôme, $Q(x)$ sera aussi un polynôme et <u>x^n divisera $P_n^2 - X - 1$</u>.

III.3.a *

On a vu, au III.2.b, que $X^n \mid P_n^2(X) - X - 1$, donc :

$$\frac{X^n}{\omega^{2n}} \mid P_n^2\left(\frac{X}{\omega^2}\right) - \frac{X}{\omega^2} - 1$$

soit $$X^n \mid \omega^2 P_n^2\left(\frac{X}{\omega^2}\right) - X - \omega^2$$

Pour $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, on aura alors :

$$X^n \mid Q^2 - X - \omega^2 \Leftrightarrow \begin{cases} X^n \mid \omega^2 P_n^2\left(\frac{X}{\omega^2}\right) - X - \omega^2 \\ X^n \mid Q^2 - X - \omega^2 \end{cases} \Leftrightarrow X^n \mid Q^2 - \omega^2 P_n^2\left(\frac{X}{\omega^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow X^n \mid \left(Q - \omega P_n\left(\frac{X}{\omega^2}\right)\right)\left(Q + \omega P_n\left(\frac{X}{\omega^2}\right)\right) \quad (*)$$

X ne peut pas diviser simultanément $Q - \omega P_n\left(\frac{X}{\omega^2}\right)$ et $Q + \omega P_n\left(\frac{X}{\omega^2}\right)$ (sinon, $Q(0) - \omega = 0 = Q(0) + \omega$). Donc $(*)$ équivaut à :

$$X^n \mid Q - \omega P_n\left(\frac{X}{\omega^2}\right) \quad \text{ou} \quad X^n \mid Q + \omega P_n\left(\frac{X}{\omega^2}\right)$$

ce qui, compte tenu de $\deg Q \pm \omega P_n\left(\frac{X}{\omega^2}\right) \leq n-1$, équivaut à :

$$Q = \pm \omega P_n\left(\frac{X}{\omega^2}\right)$$

III.3.b Le a) assure l'existence de $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que :

$$Q^2 - X - \omega^2 = X^n T(X) \quad \text{avec } T \in \mathbb{C}[X]$$

d'où $$Q^2(u) - u - \omega^2 e = 0$$

$$Q^2(u) = u + \omega^2 e$$

ce qui montre que $Q(u) \in \mathcal{R}(u + \omega^2 e)$ et $\mathcal{R}(u + \omega^2 e) \neq \emptyset$.

(*2nde démonstration p19)

III.4.a $g^2 = u + \omega^2 e \Rightarrow gu = g(g^2 - \omega^2 e) = g^3 - \omega^2 g$

$$= (g^2 - \omega^2 e)\, g = u g$$

III.4.b Ici $n = N$, donc $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E dans laquelle $g(x)$ s'exprime :

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i(x)$$

Posons $P(X) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i X^i$. On vient de voir que $g(x) = P(u)x$, ce qui entraine à son tour :

$$g(u^k(x)) = u^k g(x) = u^k P(u)(x) = P(u)(u^k(x))$$

de sorte que g et $P(u)$, coïncidant sur chacun des vecteurs de la base $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$, soient égaux.

III.4.c D'après le b) :

$$g \in \mathcal{R}(u + \omega^2 e) \Leftrightarrow \begin{cases} g = P(u) \\ P^2(u) = u^2 + \omega^2 e \end{cases}$$

et :

$$P^2(u) = u^2 + \omega^2 e \underset{(\text{III}.1.b)}{\Leftrightarrow} X^n \mid P^2(X) - X - \omega^2 \underset{(\text{III}.3.a)}{\Leftrightarrow} P \in \{\pm Q_{n,\omega}\}$$

permet de conclure à :

$$g \in \mathcal{R}(u + \omega^2 e) \Leftrightarrow g = \pm Q_{n,\omega}(u)$$

III.5 $A = U + I$ où $U = \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 2&0&0&0 \\ 0&2&0&0 \\ 0&0&2&0 \end{pmatrix}$ est nilpotente d'indice 4.

III.4.c montre que $M^2 = A$ ssi M est la matrice de $\pm Q_{4,1}(u)$, où u désigne l'endomorphisme de matrice U et :

$$Q_{4,1}(X) = P_4(X) = 1 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2 + \frac{1}{16}X^3$$

On calcule $U^2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 4&0&0&0 \\ 0&4&0&0 \end{pmatrix}$, puis $U^3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 8&0&0&0 \end{pmatrix}$, d'où

$$M = \pm Q_{4,1}(u) = \pm \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 1&1&0&0 \\ -\frac{1}{2}&1&1&0 \\ \frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1&1 \end{pmatrix}$$

III.6 Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g^2 = u$. On sait que :

$$u^n = 0 \ , \quad u^{n-1} \neq 0 \quad \text{donc} \quad g^{2n} = 0 \quad \text{et} \quad g^{2n-2} \neq 0.$$

* 1er cas : Si $g^{2n} = 0$ et $g^{2n-1} \neq 0$, $h = g + \lambda g^{2n-1}$ (où $\lambda \in \mathbb{C}$) vérifie :

$$h^2 = g^2 + 2\lambda g^{2n} + \lambda^2 g^{2(2n-1)} = u \quad \text{car } 2(2n-1) \geq 2n$$

* 2e cas : Si $g^{2n-1} = 0$ et $g^{2n-2} \neq 0$, $h = g + \lambda g^{2n-2}$ vérifie :

$$h^2 = g^2 + 2\lambda g^{2n-1} + \lambda^2 g^{2(2n-2)} = u \quad \text{car } 2(2n-2) \geq 2n.$$

Dans tous les cas, il y a une infinité de solutions de l'équation $g^2 = u$.

III.7.a $\begin{pmatrix} a&d&g \\ b&e&h \\ c&f&i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 1&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 1&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a&d&g \\ b&e&h \\ c&f&i \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} d&0&0 \\ e&0&0 \\ f&0&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ a&d&g \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$$

d'où $d = f = g = 0$ et $a = e$. Ainsi :

$$MA = AM \iff M = \begin{pmatrix} a&0&0 \\ b&a&h \\ c&0&i \end{pmatrix} \quad (\text{où } a, b, c, h, i \in \mathbb{C})$$

III.7.b Si $M^2 = A$, alors M commute avec A, de sorte que l'on cherche les M vérifiant $M^2 = A$ parmi les matrices exhibées en a).

$$M^2 = A \iff \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & h \\ c & 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & h \\ c & 0 & i \end{pmatrix} = A$$

$$\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 2ab+hc & a^2 & ah+hi \\ ac+ic & 0 & i^2 \end{pmatrix} = A$$

$$\iff \begin{cases} a = i = 0 \\ hc = 1 \end{cases}$$

$$\iff M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & \frac{1}{c} \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où } (b, c) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$$

IV.1.a $\{P \in \mathbb{C}[X] / P(f) = 0\}$ est un idéal de l'anneau principal $\mathbb{C}[X]$, donc sera engendré par un seul polynôme unitaire Φ_f.
Φ_f s'appelle d'ailleurs le polynôme minimal de l'endomorphisme f.

IV.1.b Le Théorème de Cayley-Hamilton assure que $P_f(f) = 0$, et donc que Φ_f divise P_f. Ainsi :

$$\Phi_f(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - x_k)^{\beta_k} \quad \text{avec} \quad 0 \leq \beta_k \leq \alpha_k$$

Reste à montrer que $1 \leq \beta_k \leq \alpha_k$ pour tout k :

1ʳᵉ solution : Si l'on avait $\beta_1 = 0$, notons y un vecteur propre associé à la valeur propre x_1. On aurait :

$$\Phi_f(f) = 0 \Rightarrow \prod_{k=2}^{n} (f - x_k e)^{\beta_k}(y) = 0$$

$$\Rightarrow \prod_{k=2}^{n} (x_1 - x_k)^{\beta_k} . y = 0 \quad \Rightarrow y = 0$$

ce qui est absurde.

<u>2° solution</u> : Si $\beta_1 = 0$, $\Phi_f(X) = \prod_{k=2}^{n} (X - x_k)^{\beta_k}$ et le Th. de décomposition par blocs entraîne

$$E = \bigoplus_{k=2}^{n} \operatorname{Ker} (f - x_k e)^{\beta_k}$$

$$\cap$$

or $$E = \bigoplus_{k=1}^{n} \operatorname{Ker} (f - x_k e)^{\alpha_k}$$ via le même Théorème.

Nécessairement $\operatorname{Ker} (f - x_1 e)^{\alpha_1} = \{0\}$ donc $\operatorname{Ker} (f - x_1 e) = \{0\}$, ce qui contredit le fait que x_1 soit une valeur propre de f.

IV.2 Si $g^2 = f$, g commutera avec f, donc aussi avec $f - x_k e$. Soit $u \in E_k$. On a :

$$(f - x_k e)^{\alpha_k} (g(u)) = g \circ (f - x_k e)^{\alpha_k} (u) = 0$$

ce qui prouve que $g(u) \in E_k$. <u>D'où $g(E_k) \subset E_k$</u>.

IV.3.a

$x_1 = 0$ est valeur propre de f, donc $f|_{E_1} : E_1 \to E_1$ sera nilpotent d'indice β_1 (cf lemme 1 ci-dessous).

III.1.c s'applique à l'endomorphisme $f|_{E_1}$ de E_1 :

$$\beta_1 > \frac{\dim E_1 + 1}{2} \Rightarrow \mathcal{R}(f|_{E_1}) = \emptyset \qquad (*)$$

On sait que $\dim E_1 = \alpha_1$ (cf lemme 2)

De plus $g \in \mathcal{R}(f) \overset{(IV.2)}{\Longrightarrow} g|_{E_1} \in \mathcal{L}(E_1)$ et $g|_{E_1} \in \mathcal{R}(f_{E_1})$,

donc compte tenu de $(*)$, on aura :

$$\beta_1 > \frac{\alpha_1 + 1}{2} \Rightarrow \mathcal{R}(f) = \emptyset$$

Lemme 1 : β_1 est l'indice de nilpotence de $f|_{E_1} \in \mathcal{L}(E_1)$.

preuve : Le Théorème de décomposition des noyaux (ou encore "Th. de réduction par blocs") montre que

$$\begin{array}{ccccc} E & = & \operatorname{Ker} f^{\alpha_1} & \oplus & \bigoplus_{k=2}^{n} \operatorname{Ker}(f - x_k e)^{\alpha_k} \\ & & \cup & & \cup \\ E & = & \operatorname{Ker} f^{\beta_1} & \oplus & \bigoplus_{k=2}^{n} \operatorname{Ker}(f - x_k e)^{\beta_k} \end{array}$$

d'où immédiatement

$$\operatorname{Ker} f^{\beta_1} = \operatorname{Ker} f^{\alpha_1} = E_1$$

Si l'on suppose, par l'absurde, que $\operatorname{Ker} f^{\beta_1 - 1} = E_1$, alors

$$E = \operatorname{Ker} f^{\beta_1 - 1} \oplus \bigoplus_{k=2}^{n} \operatorname{Ker}(f - x_k e)^{\beta_k}$$

Si l'on note $u \in E$, $u = u_1 + \sum_{k=2}^{n} u_k$ où $\begin{cases} u_1 \in \operatorname{Ker} f_1^{\beta_1 - 1} \\ u_k \in \operatorname{Ker}(f - x_k e)^{\beta_k} \end{cases}$

on obtient :

$$f^{\beta_1 - 1} \circ \prod_{k=2}^{n} (f - x_k e)^{\beta_k} (u) = 0$$

donc $X^{\beta_1 - 1} \prod_{k=2}^{n} (X - x_k)^{\beta_k}$ annule f sans être divisible par le polynôme minimal Φ_f. C'est absurde.

<u>Conclusion</u> : $\operatorname{Ker} f^{\beta_1} = E_1$ et $\operatorname{Ker} f^{\beta_1 - 1} \neq E_1$

soit $(f|_{E_1})^{\beta_1} = 0$ et $(f|_{E_1})^{\beta_1 - 1} \neq 0$

CQFD

<u>NB</u> : La même démonstration montre que l'indice de nilpotence de $f|_{E_k}$ est β_k.

Lemme 2 : $\dim E_k = \alpha_k$, ie "la dimension du s.e. caractéristique associé à la valeur propre x_k est égale à la multiplicité de cette valeur propre dans le polynôme caractéristique".

preuve : Vu le Th. de décomposition par blocs, on a :

$$E = \bigoplus_{k=1}^{n} E_k$$

et dans une base adaptée, f admet la matrice triangulaire par blocs :

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} x_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & x_1 \end{matrix} & & 0 \\ & \begin{matrix} x_2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & x_2 \end{matrix} & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$$

(blocs de tailles $\dim E_1$, $\dim E_2$, …)

Le polynôme caractéristique de f s'écrit donc $P_f(X) = \prod_{k=1}^{n} (x_k - X)^{\dim E_k}$.
Comme $P_f(X) = \prod_{k=1}^{n} (x_k - X)^{\alpha_k}$, on déduit $\dim E_k = \alpha_k$ pour tout k.
CQFD

IV.3.b

$0 \notin Sp(f)$ signifie qu'aucun des x_k est nul. Notons f_k la restriction de f à E_k, à valeurs dans E_k, et rappelons que $E = \bigoplus_{k=1}^{n} E_k$.
$E_k = \operatorname{Ker}(f - x_k e)^{\alpha_k}$ montre que $f_k - x_k e \doteq u_k$ est nilpotente et permet d'appliquer le III.3.b :

$$R(u_k + \omega^2 e) \neq \emptyset \qquad \text{pour tout } \omega \in \mathbb{C}^*$$

Prenons ω tel que $\omega^2 = x_k$:

$$R(f_k) \neq \emptyset$$

Il existe donc $g_k \in \mathcal{L}(E_k)$ tel que $g_k^2 = f_k$.
Il suffit de définir $g \in \mathcal{L}(E)$ par $g|_{E_k} = g_k$, pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, pour obtenir $g^2 = f$, et $R(f) \neq \emptyset$.

IV.3.c

Supposons $x_1 = 0$, $\alpha_1 \geq 2$ et $\mathcal{R}(f) \neq \emptyset$, et montrons que $\mathcal{R}(f)$ est infini.

Il existe $g \in \mathcal{R}(f)$. Alors $g(E_k) \subset E_k$ (IV.2) permet de définir les endomorphismes $g_k = g|_{E_k}$ de E_k tels que $g_k^2 = f_k$.

En particulier, $g_1^2 = f_1$ donc $\mathcal{R}(f_1) \neq \emptyset$. f_1 étant nilpotent, et $\dim E_1 = \alpha_1 \geq 2$, III.6 entraîne que <u>$\mathcal{R}(f_1)$ est infini</u>.

Enfin, chaque $h \in \mathcal{R}(f_1)$ permet de construire un endomorphisme $g_h \in \mathcal{R}(f)$ en posant :

$$g_h|_{E_1} = h \quad , \text{et} \quad g_h|_{E_k} = g_k \quad \text{pour } k \neq 1$$

$\mathcal{R}(f)$ sera bien infini.

IV.4.a

$u_k \doteq f_k - x_k e$ est nilpotente d'indice $\beta_k = \alpha_k$, et $\alpha_k = \dim E_k$.
On est donc dans le cas du III.4 et :

$$\# \mathcal{R}(f_k) = \# \mathcal{R}(u_k + x_k e) = 2 \qquad \forall k \in \mathbb{N}_n$$

Donc $\quad \# \mathcal{R}(f) = 2^n$

IV.4.b Si $x_1 = 0$ et $\alpha_1 = 1$, le calcul du a) est encore valable pour $k = 2, \dots, n$, mais il reste à préciser $\# \mathcal{R}(f_1)$. $\alpha_1 = 1 = \dim E_1$ et $f_1 = 0$.

Si $g_1^2 = f_1 = 0$, alors $g_1 = 0$ (en effet, en notant $g_1(u) = \lambda u$ on obtient $\lambda^2 u = 0$ donc $\lambda = 0$ et $g_1 = 0$) de sorte que $\mathcal{R}(f_1) = \{0\}$.

Finalement $\quad \# \mathcal{R}(f) = \prod_{k=1}^{n} \# \mathcal{R}(f_k) = 2^{n-1}$

FIN

NOTES :

- Seconde démonstration de III.3.a :

On démontre l'équivalence lorsque $\omega = 1$, puis on ramène le cas où $\omega \neq 1$ à celui où $\omega = 1$.

Cas où $\omega = 1$:

$$X^n \mid Q^2 - X - 1 \iff Q = \pm P_n$$

preuve :

($\Leftarrow$) fait en III.2.b.

($\Rightarrow$) Si $X^n \mid Q^2 - X - 1$, compte tenu de $X^n \mid P_n^2 - X - 1$, on obtient :

$$X^n \mid Q^2 - P_n^2 = (Q - P_n)(Q + P_n) \qquad (*)$$

Si $X^n \nmid Q - P_n$ et $X^n \nmid Q + P_n$, alors X divisera $Q - P_n$ et $Q + P_n$, ce qui entraîne $Q(0) - P_n(0) = 0 = Q(0) + P_n(0)$, donc $P_n(0) = 0$, absurde car $P_n(0) = 1$. Donc $X^n \mid Q - P_n$ ou $X^n \mid Q + P_n$. Comme $\deg(Q \pm P_n) \leq n-1$, cela entraîne bien $Q - P_n = 0$ ou $Q + P_n = 0$, soit $Q = \pm P_n$. CQFD

Cas général où $\omega \neq 1$:

$$X^n \mid Q^2 - X - \omega^2 \iff Q = \pm Q_{n,\omega}$$

preuve :

$$X^n \mid Q^2 - X - \omega^2 \iff X^n \,\Big|\, \frac{1}{\omega^2} Q^2(X) - \frac{X}{\omega^2} - 1$$

$$\iff Y^n \,\Big|\, \frac{1}{\omega^2} Q^2(\omega^2 Y) - Y - 1 \qquad \left(\text{on a posé } Y = \frac{X}{\omega^2}\right)$$

$$\iff \frac{1}{\omega} Q(\omega^2 Y) = \pm P_n(Y) \qquad (\text{d'après le cas où } \omega = 1)$$

$$\iff Q(X) = \pm \omega \, P_n\left(\frac{X}{\omega^2}\right)$$

CQFD